MATHEMATIQUES

Section A_2 (option P')

Durée : 4 heures

Soit n un entier strictement positif, on considère une famille $\mathcal{F}_n$ de fonctions numériques continues sur un intervalle ouvert $]a, b[$ ayant la propriété suivante :

« Pour tout système de n points distincts $x_1, \ldots, x_n$ de $]a, b[$ et tout système de n nombres réels $y_1, \ldots, y_n$, il existe F unique dans $\mathcal{F}_n$ tel que $F(x_i) = y_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ ».

A

1° Montrer que si g est une fonction numérique définie sur $]a, b[$, étant donné n points distincts de $]a, b[$, il existe F unique dans $\mathcal{F}_n$ égal à g en ces points.

2° On suppose $n \geqslant 2$, on se donne les points

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

et on considère deux fonctions distinctes F_1 et F_2 de $\mathcal{F}_n$ telles que $F_1(x_i) = F_2(x_i)$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.

a. Soit $0 \leqslant i \leqslant n-1$, montrer que l'on a soit $F_1(x) < F_2(x)$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$ soit $F_1(x) > F_2(x)$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$.

b. Soit $1 \leqslant i \leqslant n-1$, étant donné ξ_1 et ξ_2 tels que

$$x_{i-1} < \xi_1 < x_i < \xi_2 < x_{i+1}$$

on considère la fonction F de $\mathcal{F}_n$ définie par les conditions $F(x_j) = F_1(x_j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$ et $j \neq i$, $F(\xi_1) = F_1(\xi_1)$ et $F(\xi_2) = F_2(\xi_2)$, montrer que $F(\xi_1) - F_2(\xi_1)$, $F(x_i) - F_2(x_i)$ et $F(\xi_2) - F_1(\xi_2)$ sont de même signe.

c. En déduire que la différence $F_1(x) - F_2(x)$ change de signe en passant par chacun des points $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

3° Étant donné d'une part n points distincts $x_1, \ldots, x_n$ de $]a, b[$ et n nombres réels $y_1, \ldots, y_n$ et d'autre part une suite numérique monotone (z_p) convergeant vers y_1, on considère la fonction F de $\mathcal{F}_n$ définie par $F(x_i) = y_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ et les fonctions F_p de $\mathcal{F}_n$ définies par $F_p(x_1) = z_p$ et $F_p(x_i) = y_i$ pour $i = 2, \ldots, n$. On se donne $x \in]a, b[$.

a. Montrer que la suite $(F_p(x))$ est convergente.

b. Si x n'est pas un des points $x_1, \ldots, x_n$, on considère la fonction $\widetilde{F}$ de $\mathcal{F}_n$ définie par $\widetilde{F}(x) = \lim\limits_{p \to \infty} F_p(x)$ et $\widetilde{F}(x_i) = y_i$ pour $i = 2, \ldots, n$.

Montrer que, pour tout entier p, $\widetilde{F}(x_1)$ est compris entre y_1 et z_p.

c. En déduire que $F(x) = \lim\limits_{p \to \infty} F_p(x)$.

B

Soit f une fonction numérique définie sur $]a, b[$ vérifiant la propriété $P(\mathcal{F}_n)$ suivante :

« Pour tout système de n points distincts vérifiant

$$a < x_1 < \ldots < x_n < b,$$

on a $f(x) \geqslant F(x)$ pour $x \in]x_n, b[$ où F est la fonction de $\mathcal{F}_n$ égale à f en $x_1, \ldots, x_n$ ».

1° Étant donné les points $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$, on considère la fonction F de $\mathcal{F}_n$ égale à f en $x_1, \ldots, x_n$.

a. Soit ξ vérifiant $x_{n-1} < \xi < x_n$, on considère $\widetilde{F} \in \mathcal{F}_n$ égal à f en $x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi$; montrer que $F(x) \geqslant \widetilde{F}(x)$ pour $x \geqslant x_{n-1}$.

b. En déduire que $f(x) \leqslant F(x)$ pour $x \in]x_{n-1}, x_n[$.

c. Soit $1 \leqslant i \leqslant n+1$, montrer que $(-1)^{n+i}[F(x) - f(x)] \geqslant 0$ pour $x \in]x_{i-1}, x_i[$.

2° On suppose $n \geqslant 2$.

a. Montrer que, étant donné les points $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$, il existe F_1 et F_2 dans $\mathcal{F}_n$ vérifiant $F_1(x) \leqslant f(x) \leqslant F_2(x)$ pour $x \in [x_1, x_0]$ et $F_1(x) \geqslant f(x) \geqslant F_2(x)$ pour $x \in [x_0, x_2]$.

b. En déduire que f est continue sur $]a, b[$.

3° On suppose $n \geqslant 3$ et tous les éléments de $\mathcal{F}_n$ dérivables sur $]a, b[$.

a. Étant donné les points $a < x_n < \ldots < x_1 < b$, on désigne par Φ l'ensemble des fonctions G de $\mathcal{F}_n$ telles que $G - f$ s'annule en $x_2, x_3, \ldots, x_n$ et l'intervalle $]x_3, x_2[$.

(i) Montrer que l'ensemble M des nombres $G(x_1)$ pour $G \in \Phi$ est majoré et que la borne supérieure y_1 de M n'appartient pas à M.

(ii) On considère la fonction $\widetilde{G}$ de $\mathcal{F}_n$ égale à f en $x_2, \ldots, x_n$ et à y_1 en x_1, montrer que $\widetilde{G} \notin \Phi$ mais qu'il existe une suite G_p de fonctions de Φ telles que pour tout $x \in]a, b[$

$$\lim_{p \to \infty} G_p(x) = \widetilde{G}(x).$$

(iii) En déduire que, pour $x \geqslant x_3$, on a $\widetilde{G}(x) \leqslant f(x)$.

b. En considérant l'ensemble Ψ des fonctions H de $\mathcal{F}_n$ telles que $H - f$ s'annule en $x_1, x_2, x_4, \ldots, x_n$ et sur l'intervalle $]x_2, x_1[$, construire de même une fonction $\widetilde{H} \in \mathcal{F}_n$ telle que, pour $x \in [x_4, x_1]$, on ait $\widetilde{H}(x) \geqslant f(x)$.

Montrer qu'alors $\widetilde{H}'(x_2) = \widetilde{G}'(x_2)$ et que f est dérivable en x_2.

c. En déduire que f est dérivable sur $]a, b[$.

C

On suppose que $\mathcal{F}_n$ est stable par addition.

1° Soient $x_1, \ldots, x_n$ fixés dans $]a, b[$, on considère les fonctions $u_1, \ldots, u_n$ de $\mathcal{F}_n$ définies par $u_i(x_j)$ égal à 0 si $i \neq j$ et à 1 si $i = j$.

a. Montrer que la fonction nulle appartient à $\mathcal{F}_n$ et que si $F \in \mathcal{F}_n$ et si λ est un nombre rationnel alors $\lambda F \in \mathcal{F}_n$.

b. En déduire que $\mathcal{F}_n$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension n dont les fonctions $u_1, \ldots, u_n$ forment une base.

2° Soit $u_1, \ldots, u_n$ une base de $\mathcal{F}_n$.

a. Montrer que pour tout système de n points distincts $x_1, \ldots, x_n$ de $]a, b[$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1(x_1) & \ldots & u_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(x_n) & \ldots & u_n(x_n) \end{vmatrix} \quad \text{est non nul.}$$

b. En déduire qu'une fonction numérique f définie sur $]a, b[$ possède la propriété P $(\mathcal{F}_n)$ si et seulement si, pour tout système de $(n+1)$ points vérifiant $a < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} < b$, on a

$$\begin{vmatrix} u_1(x_1) & \ldots & u_n(x_1) & f(x_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_1(x_n) & \ldots & u_n(x_n) & f(x_n) \\ u_1(x_{n+1}) & \ldots & u_n(x_{n+1}) & f(x_{n+1}) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_1(x_1) & \ldots & u_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(x_n) & \ldots & u_n(x_n) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail